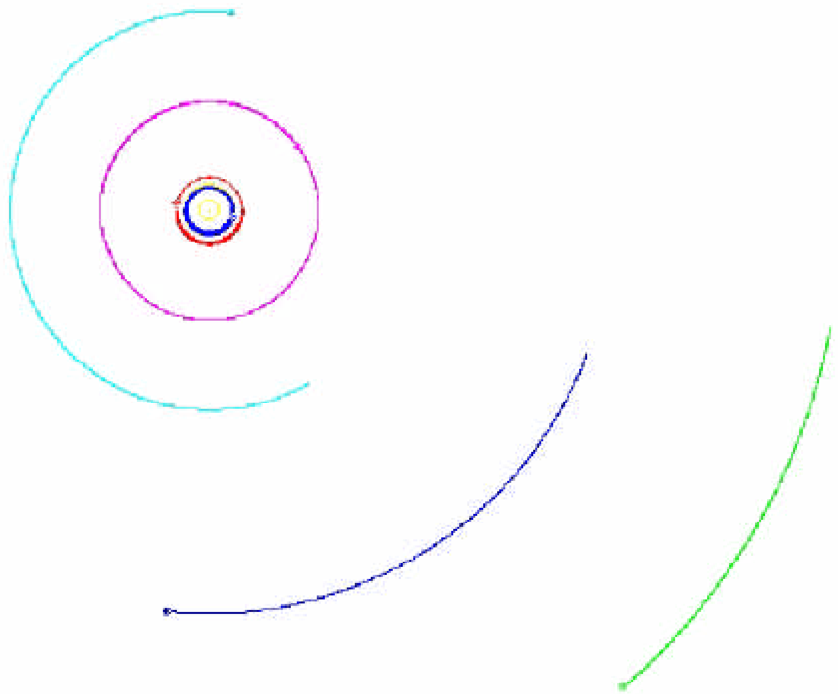
Simulation der Bahnen in Mehrkörpersystemen



Wettbewerb "Jugend Forscht" 2005

Daniel Rocholz (15 Jahre)

Arbeitsgemeinschaft "Jugend Forscht"
des Christian-Gymnasiums Hermannsburg
Leitung: StD Thomas Biedermann

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

1.1 Die Idee - Warum ausgerechnet eine Simulation?

Im Oktober 2004 habe ich mich für eine wiederholte Teilnahme am Wettbewerb entschieden. Im letzten Jahr habe ich mich zusammen mit einem Klassenkameraden mit der Nachführung von Teleskopen beschäftigt, was eine Arbeit im Bereich Technik war. Die Fortführung dieses Projekts habe ich aus Zeitgründen diese Jahr nicht aufgenommen, sondern mich auf die Sparte Mathematik/Informatik festgelegt, da ich Programmierarbeit auch sehr gut in freien Stunden zuhause erledigen kann. Die Idee, das Sonnensystem zu simulieren resultierte aus einem Code, den ich im Internet gefunden und meinem Betreuungslehrer vorgeführt habe. Der Code war allerdings physikalisch inkorrekt - mein Projekt war geboren.

1.2 Über alle Hürden hinweg

Da wir in der Schule die nötigen Themen (Gravitationsgesetz, Keplersche Gesetze, Iterationen) noch nicht behandelt hatten, musste ich mich erst anhand eines Lehrbuches [1] in kleinen Schritten an diese Inhalte herantasten.

Als Programmiersprache habe ich Visual Basic (VB) gewählt, da ich bereits Erfahrung mit Q-Basic habe. Mir ist sehr wohl bewusst, dass VB nicht gerade die schnellste Sprache ist, erst recht nicht bei der Verwendung von grafischen Routinen, doch hätte ich in C oder C++ eine sehr lange Einarbeitungsphase gebraucht. Nun muss ich mich damit abfinden, dass mein Programm langsamer ist als in C/C++. Doch dafür gibt mir VB die Möglichkeit, auf einfache Weise eine benutzerfreundliche Oberfläche zu entwerfen.

2. Grundlagen

2.1 Das Gravitationsgesetz

Zwischen zwei Körpern wirkt eine Kraft, die sich auf ihre Masse zurückführen lässt. Anders als die Kraftwirkung zwischen zwei Ladungen, die sich abstoßen oder anziehen können, wirkt die Gravitationskraft immer anziehend. Die Stärke dieser Kraft hängt ab von der Masse der beiden Körper und von ihrem Abstand zueinander. Isaac Newton (1643 - 1727) hat die entsprechenden Gesetzmäßigkeiten 1666 erstmalig formuliert, doch erst 60 Jahre nach seinem Tod konnte Henry Cavendish (1731 - 1810) mit seiner Gravitationsdrehwaage entsprechende Messungen im Labor auf der Erde nachvollziehen.

Nach Newtons Gravitationsgesetz gilt für die Kraft zwischen zwei Körpern mit den Massen m_1 und m_2:

$$F = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \qquad (1)$$

dabei ist r der Abstand der Mittelpunkte der beiden Körper und γ die sog. Gravitationskonstante, deren Wert Cavendish bestimmt hat und im heutigen Maßsystem angegeben wird mit

$$\gamma = 6{,}673 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \qquad (2)$$

Dabei geht man von Körpern mit einer homogenen, das heißt gleichmäßig verteilten Masse aus, wobei das Material, aus dem die Körper bestehen, keine Rolle spielt. Bei der Angabe des Abstandes zwischen den beiden Körpern tut man so, als würde sich die Masse in einem Punkt im Zentrum (dem „Schwerpunkt“ des Körpers) konzentrieren.

So schwer das auch vorzustellen sein mag, heißt das aber, dass nicht nur die Erde einen Menschen anzieht, der sich auf ihr befindet, sondern dass auch der Mensch die Erde mit der gleichen Kraft anzieht. Springt der Mensch hoch, so fällt er wieder auf die Erde zurück. Genauso muss aber auch die Erde sich ein kleines Stück entfernt haben und wieder an ihre vorherige Position zurückfallen. Dass wir nur die Bewegung des Menschen sehen und nicht die der Erde, liegt daran, dass sich beide unterschiedlich schnell bewegen. Die Erde hat eine sehr viel größere Masse als der Mensch und lässt sich durch die zwischen ihnen wirkende Kraft nur wenig „aus der Ruhe bringen“. Diesen Zusammenhang hat ebenfalls Newton in seiner Grundgleichung der Mechanik formuliert: Ein Körper wird beschleunigt, wenn eine Kraft auf ihn wirkt; die Beschleunigung ist proportional zur Kraft und umgekehrt proportional zur Masse:

$$a = \frac{F}{m} \qquad (3)$$

Wird ein Körper beschleunigt, so ändert sich seine Geschwindigkeit. Bewegt sich ein Körper also mit konstanter Geschwindigkeit oder befindet sich in Ruhe, so ist die Beschleunigung Null, das heißt, es wirkt keine beschleunigende Kraft auf ihn ein.

Wenn sich ein Körper bewegt, ändert sich seine Position im Raum in Abhängigkeit von der Zeit. Um die Bahn eines Körpers zu beschreiben, benötigt man eine Gleichung, die den Ort in Abhängigkeit von der Zeit darstellt. Diese Gleichung nennt man Bewegungsgleichung.

2.2 Bewegungszustände

2.2.1 Ruhelage

Befindet sich ein Körper in Ruhe, lautet seine Bewegungsgleichung

$$s(t) = s_0 = \text{const} \qquad (4a)$$

Da er sich nicht bewegt, ist seine Geschwindigkeit Null:

$$v(t) = 0 \qquad (4b)$$

Da sich seine Geschwindigkeit nicht ändert ist auch seine Beschleunigung Null:

$$a(t) = 0 \qquad (4c)$$

2.2.2 Gleichförmige Bewegung

Bei der gleichförmigen Bewegung bewegt sich der Körper mit konstanter Geschwindigkeit, legt also in gleichen Zeiten gleiche Strecken zurück. Der Ort ändert sich also mit der Zeit proportional zu v:

$$s(t) = v \cdot t + s_0 \qquad (5a)$$

Dabei ist s_0 der Startort, von dem aus man den neuen Ort bestimmt.

Für die Geschwindigkeit gilt, wie schon gesagt:

$$v(t) = v_0 = \text{const} \qquad (5b)$$

und die Beschleunigung ist Null:

$$a(t) = 0 \qquad (5c)$$

2.2.3 Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Bei der gleichmäßig beschleunigten Bewegung ändert sich die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit proportional zur Beschleunigung. Es gilt also

$$v(t) = a \cdot t + v_0 \qquad (6b)$$

hierbei ist v_0 die Geschwindigkeit, die der Körper vorher schon hatte. Für die Beschleunigung gilt

$$a(t) = a_0 = \text{const} \qquad (6c)$$

Schwieriger ist hier die Gleichung für s(t). Da die Geschwindigkeit immer weiter zunimmt, wird mit jeder verstreichenden Zeiteinheit der zusätzlich zurückgelegte Weg ebenfalls immer größer. Hier gilt nun ein quadratischer Zusammenhang [1, S. 35]:

$$s(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0 \qquad (6a)$$

2.2.4 Kreisbewegung

Bewegt sich eine Masse m um ein Zentrum auf einer Kreisbahn, entsteht ebenfalls eine Kraft, die landläufig als Zentrifugalkraft oder Fliehkraft bezeichnet wird. Nach [1, S. 44] gilt für diese Kraft

$$F = m \cdot \frac{v^2}{r} \qquad (7)$$

wobei v die (Bahn-) Geschwindigkeit der Masse und r ihr Abstand vom Drehzentrum ist.

2.3 Planetenbewegungen

Das einfachste denkbare Planetensystem besteht aus einer Sonne als Zentralmasse und einem Planeten, der diese Zentralmasse umkreist. Die Masse der Sonne sei erheblich größer als die des Planeten. Zur Unterscheidung der beiden Massen werde die der Sonne mit M und die des Planeten mit m bezeichnet. Platziert man m in einem Abstand r von M, so wirkt zwischen beiden Massen nach (1) die Gravitationskraft

$$F = \gamma \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \qquad (8)$$

Überlässt man die beiden Himmelskörper nun sich selbst, so werden sie sich wegen der gegenseitigen Anziehung aufeinander zu bewegen und irgendwann kollidieren. Das wäre das Ende des Planetensystems.

Damit das nicht passiert, muss man dem Planeten eine Anfangsgeschwindigkeit geben, damit er sich „um die Sonne herum“ bewegen kann. Damit eine Kreisbahn entsteht, muss diese Geschwindigkeit so groß sein, dass sich Zentrifugalkraft F_Z und Gravitationskraft F_G die Waage halten. Es muss also gelten:

$$F_Z = F_G \qquad (9)$$

Einsetzen nach den Gleichungen (7) und (8) ergibt

$$m \cdot \frac{v^2}{r} = \gamma \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \qquad (10)$$

Daraus kann man die Geschwindigkeit v berechnen, die man dem Planeten geben muss, damit eine Kreisbahn entsteht. Nach Multiplikation mit r und Division durch m erhält man

$$v = \sqrt{\gamma \cdot \frac{M}{r}} \qquad (11)$$

die notwendige Geschwindigkeit ist also nur vom Abstand r und der Masse der Sonne, nicht aber von der Masse des Planeten abhängig - das heißt: jeder Körper mit dem selben Abstand r benötigt für eine Kreisbahn die selbe Geschwindigkeit v! Dies ist z.B. bei Satelliten wichtig, die zusammen mit der Erde die Sonne umkreisen.

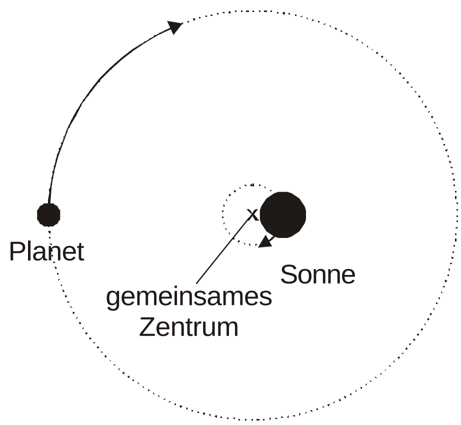


Abb. 1: Zweikörpersystem mit gemeinsamem Rotationszentrum

Eine ideale Kreisbahn erhält man nur, wenn sich bei der Bewegung des Planeten die Sonne nicht bewegt. Da aber nach Glg. (1) die Gravitationskraft auf beide Himmelskörper wirkt, wird sich die Sonne auch bewegen. Eine ideale Kreisbahn erhält man nur dann, wenn die Masse der Sonne unendlich größer ist als die Masse des Planeten, was aber nicht möglich ist. Tatsächlich werden sich deshalb die beiden Massen um ein gemeinsames Zentrum bewegen, wobei die größere Masse der Sonne eine Kreisbahn mit kleinem Radius beschreiben wird. Dies trifft z.B. auch für das System Erde-Mond zu.

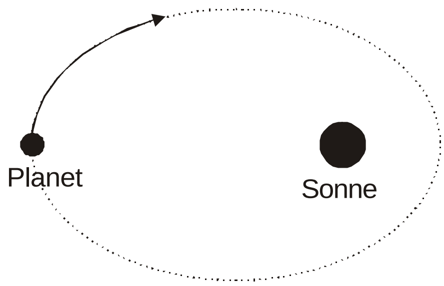


Abb. 2: Ellipsenbahnen nach Kepler

Weicht die Bahngeschwindigkeit von der in Glg. (11) berechneten ab, so erhält man keine Kreisbahn, sondern eine Ellipse. Die entsprechenden Gesetze wurden bereits von Kepler (1571 - 1630) - also schon lange vor Newton und Cavendish - ohne Kenntnis des Gravitationsgesetzes alleine aus Beobachtungen der Himmelskörper formuliert. Danach überstreichen die Planeten in gleichen Zeiten gleiche Flächen und bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

3. Berechnung der Planetenbewegung

Nach den bisherigen Überlegungen kann man lediglich den Anfangszustand eines Systems beschreiben. Wie aber entwickelt sich die Bewegung der einzelnen Himmelskörper mit fortschreitender Zeit weiter?

Man könnte versuchen, die Bahngleichungen (ähnlich wie für die Bewegungsgleichungen in Kap. 2.2) aufzustellen, doch das ist nicht ganz einfach. Eine andere Methode führt hier leichter zum Ziel: man beginnt mit einem (hoffentlich zutreffenden) Anfangswert und berechnet daraus für eine kurze Zeit später den sich neu ergebenden Zustand des Systems. Von diesem ausgehend berechnet man dann den nächsten usw. Dieses Verfahren nennt man wegen seines schrittweisen Vorgehens ein Iterationsverfahren. Dieses Verfahren wird um so genauer, je kleiner man die Schrittweite wählt, dafür muss man allerdings mehr Rechenzeit in Kauf nehmen.

Wenn ein Planet sich bewegt, ändert sich seine Beschleunigung ständig und ist zu keiner Zeit konstant, da sie vom Abstand des Planeten zum Zentralstern abhängt. Um nun trotzdem seine Bewegung zu berechnen, stellt man sich vor, seine aktuelle Beschleunigung ändere sich für eine bestimmte Zeit Δt nicht, was heißt, man tut so, als würde er gleichmäßig beschleunigt werden. Nun kann man mit den Bewegungsgleichungen (6a-c) seine neue Position und Geschwindigkeit berechnen. Anschließend nimmt man die neuen Werte wieder als Anfangszustand und wiederholt das Verfahren.

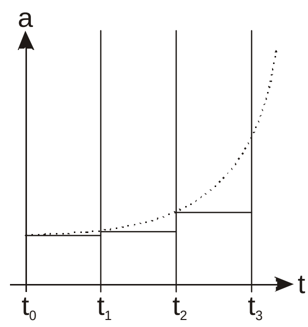


Abb. 3: Iterationsschritte bei der Beschleunigung

Wenn man auf diese Weise die Bewegung der Planeten berechnet, muss man Ungenauigkeiten in Kauf nehmen, weil die Annahme einer konstanten Beschleunigung natürlich nicht ganz korrekt ist. Dieses Problem ist typisch für jede Iteration. Hier muss man sich bemühen, durch eine möglichst kleine Schrittweite den Fehler so gering wie möglich zu halten, sofern die dadurch steigende Rechenzeit das zulässt.

3.1 Berechnung eines einzelnen Iterationsschrittes

Die Gravitationskraft zwischen zwei Himmelskörpern berechnet man nach Glg. (8). Mit Glg. (3) erhält man daraus die Beschleunigung zu

$$a = \frac{F}{m} = \frac{\gamma \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}}{m} = \gamma \cdot \frac{M}{r^2} \qquad (12)$$

das heißt: die Beschleunigung des einen Körpers hängt ausschließlich von der Masse des anderen Himmelskörpers ab, ist also von seiner eigenen Masse m unabhängig.

Für ein einfaches System wie Sonne - Erde erhält man mit den entsprechenden Angaben

$$m_{Erde} = 5{,}9764 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$$

$$m_{Sonne} = 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$$

$$r_{E,S} = 1{,}496 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$$

nach Glg. (8) für die Kraft zwischen den beiden Körpern

$$F = 6{,}673 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2} \cdot \frac{1{,}989 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg} \cdot 5{,}9764 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}{\left(1{,}496 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}\right)^2} = 3{,}544 \cdot 10^{22}\,\mathrm{N}$$

Die Beschleunigung muss für die jeden beiden Körper einzeln berechnet werden, da sie unterschiedliche Massen haben, die beschleunigt werden. Man erhält:

Erde: $$a_{Erde} = \frac{F}{m_{Erde}} = \frac{3{,}544 \cdot 10^{22}\,N}{5{,}9764 \cdot 10^{24}\,kg} = 5{,}9299 \cdot 10^{-3}\,\frac{m}{s^2}$$

Sonne: $$a_{Sonne} = \frac{F}{m_{Erde}} = \frac{3{,}544 \cdot 10^{22}\,N}{1{,}989 \cdot 10^{30}\,kg} = 1{,}7817 \cdot 10^{-8}\,\frac{m}{s^2}$$

Wie man sieht, ist die Beschleunigung der Sonne um über 5 Zehnerpotenzen kleiner als die der Erde, sie wird also innerhalb eines Zeitintervalls ihre Geschwindigkeit weitaus weniger ändern als die Erde.

In 10 Minuten (= 600 Sekunden) ändert sich z.B. die Geschwindigkeit der Erde um den Betrag

$$\Delta v = a \cdot t = 5{,}9299 \cdot 10^{-3}\,\frac{m}{s^2} \cdot 600s = 3{,}558\,\frac{m}{s}$$

Um die neue Position zu erhalten, muss ich neben der alten Position auch ihre alte Geschwindigkeit kennen. Zu Beginn der Iteration sei die Geschwindigkeit der Erde in x- und y-Richtung

$$v_{x,0} = 29768{,}75\,\frac{m}{s} \qquad v_{y,0} = 0\,\frac{m}{s}$$

anschließend hat sie sich in y-Richtung (in Richtung der Sonne) um Δv vergrößert, dabei ist wegen der Kreisbahn die Gesamtgeschwindigkeit aber gleich geblieben. Man erhält daraus (s.a. Kap. 3.2)

$$v_{x,1} = \sqrt{\left(29768{,}75\,\frac{m}{s}\right)^2 - \left(3{,}558\,\frac{m}{s}\right)^2} = 29768{,}75\,\frac{m}{s} \qquad v_{y,1} = 3{,}558\,\frac{m}{s}$$

In den 600 Sekunden des Iterationsintervalls legt sie mit dieser Geschwindigkeit z.B. in x-Richtung

$$\Delta s = v_1 \cdot t = 29790{,}31\,\frac{m}{s} \cdot 600s = 17\,814\,186m = 17\,814km$$

zurück. Wenn man weiß, wo sich die Erde vorher befand, kann man also angeben, wo sie sich 600 Sekunden später befindet und mit welcher neuen Geschwindigkeit sie sich bewegt.

3.2 Erweiterung auf zwei Richtungen

Leider bewegen sich Planeten nicht längs einer Linie, sondern im Raum, der aber drei Richtungen (x, y und z) hat. Eine Vereinfachung - die ich in meiner Simulation auch verwende - ergibt sich aber schon, wenn ich davon ausgehe, dass sie sich in einer Ebene (x - y) bewegen. Diese kann man mit einem Koordinatensystem mit den Achsen x und y darstellen. Je nach momentaner Bewegungsrichtung legt z.B. die Erde also einen Weg in x- und einen anderen Weg in y-Richtung zurück. Entsprechendes gilt für die Kräfte, die Beschleunigungen und die Geschwindigkeiten. Der Abstand der beiden Punkte

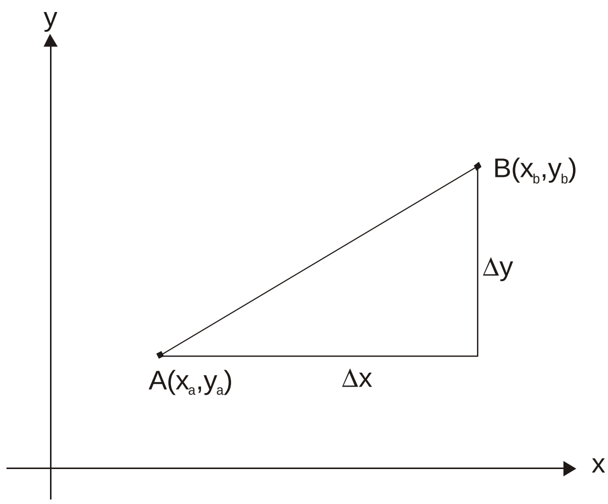


Abb. 4: Größen mit 2 Richtungskomponenten

A und B in Abb. 4 lässt sich mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnen, es gilt:

$$\overline{AB} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \qquad (13)$$

Diese Strecke wird benötigt, um z.B. mit Glg. (8) die Kraft zwischen den beiden Körpern zu berechnen. Um den neuen Ort oder die neue Geschwindigkeit zu bestimmen, muss man die einzelnen Richtungskomponenten der Beschleunigung berechnen und daraus die zugehörigen Orts- und Geschwindigkeitskomponenten bestimmen.

3.3 Mehrkörperproblem

Bisher wurde vom einfachst denkbaren System mit zwei Körpern ausgegangen. Wenn man allerdings noch einen weiteren Körper in die Berechnungen einbezieht, trifft man auf ein Problem, das im allgemeinen ‚Dreikörperproblem' genannt wird. In der Literatur heißt es, dass man in diesem Fall die Bahnbewegungen nicht mehr so einfach direkt berechnen kann. Dieses Problem lässt sich aber durch eine iterative Berechnung umgehen, auch wenn man dabei Fehler in Kauf nehmen muss, die um so größer werden, je mehr Berechnungsschritte man ausführt, weil sich mit jedem Schritt auch die Fehler fortpflanzen.

Eine Ausnahme davon stellen die sogenannten „Lagrange-Punkte" dar. Als Beispiel sei das System Sonne-Jupiter herangezogen. Jupiter beeinflusst die Bahnen einiger Asteroiden, den „Trojanern". Durch das Vorhandensein von zwei schweren Körpern ergibt sich ein Punkt, an dem sich ein Asteroid in eine Umlaufbahn um die Sonne einordnen kann, ohne von den Gravitationskräften des Jupiters beeinflusst zu werden, da sich dort die Flieh- und Gravitationskräfte gegenseitig aufheben. Diese Punkte im Raum nennt man ‚Lagrangesche Punkte'. Sie sind nach dem französischen Mathematiker Josef Lagrange (1736-1813) benannt. Im dargestellten Jupitersystem besetzen die Trojaner jeweils den dritten Punkt des gleichseitigen Dreiecks Sonne-Jupiter-Trojaner (siehe Abb. 5 [2]).

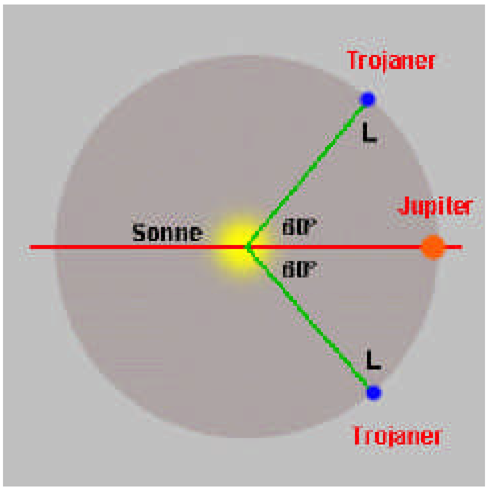


Abb. 5: Lagrange-Punkte beim Jupiter

Einen solchen Punkt macht man sich z.B. zu Nutze, um Sonnenbeobachtungen durchzuführen, indem man einen Satelliten zwischen der Sonne und der Erde in eine stabile Umlaufbahn einbringt, in meiner Arbeit gehe ich aber nicht näher darauf ein.

4. Simulation

Zur Berechnung der Einflüsse der Körper untereinander werden immer die Werte zu Beginn eines Iterationsschrittes herangezogen. Für die Anfangsgeschwindigkeiten der Körper verwende ich hier Glg. (11), da diese sehr genau stimmen müssen. Dann werden die Neuberechnungen anhand dieser Werte durchgeführt und die errechneten Werte für alle Körper als Startwerte für den nächsten Iterationsschritt gespeichert.

4.1 Berechnung eines Iterationsschrittes

Bei zwei und mehr Körpern übt jeder Körper einen Einfluss auf alle anderen aus. Da ich diesen Einfluss nicht gleichzeitig berechnen kann, rechne ich für jeweils nur zwei Körper die wirkende Beschleunigung aus und addiere die Beschleunigungen aller anderen nacheinander auf.

Dazu berechne ich zunächst den Abstand zwischen einem Himmelskörperpaar und daraus nach Glg. (8) die Kraft, die sie aufeinander ausüben. Daraus erhalte ich nach Glg. (3) die Beschleunigung, die auf den zu betrachtenden Körper ausgeübt wird. Diese wird entsprechend der aktuellen Position im Koordinatensystem vorzeichenrichtig in zwei Komponenten a_x und a_y zerlegt. Dann wird der gleiche Vorgang mit der nächsten Paarung wiederholt.

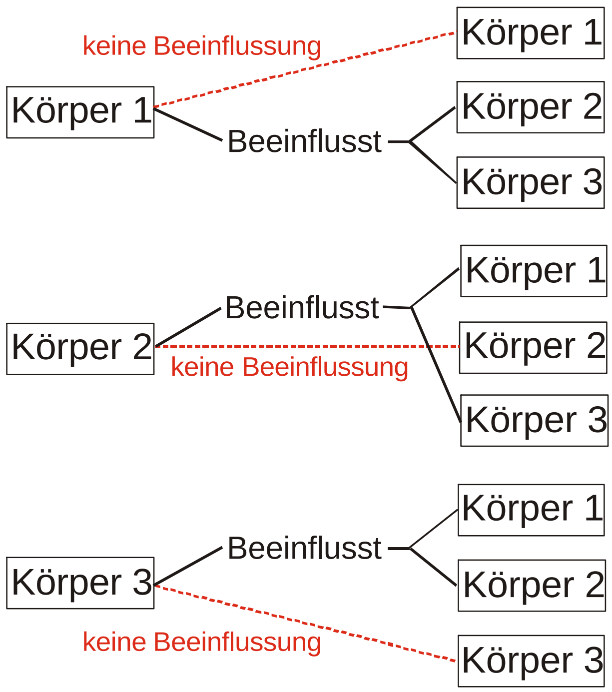


Abb. 6: Vorgehensweise bei der paarweisen Berechnung der Beschleunigung

Sind alle Beschleunigungen bestimmt, kann ich nun den Gesamteinfluss auf den zu betrachtenden Körper ermitteln, denn mit der Gesamtbeschleunigung lassen sich nun die neuen Geschwindigkeits- und Positionskomponenten nach den Glg. (6b) und (6a) berechnen. Diese Berechnungen werden für jeden zu berücksichtigenden Himmelskörper durchgeführt, wie in Abb. 6 veranschaulicht.

Nach jeder Berechnung wird die Zeitvariable t um eine Einheit erhöht. Dabei kann man frei bestimmen, wie viele Sekunden eine Einheit umfassen soll. Danach wird die Schleife von neuem aufgerufen und der nächste Iterationsschritt wird durchgeführt.

4.2 Verwendeter Datentyp

Zur Speicherung der Eigenschaften der Planeten zwischen den Iterationsschritten und für die Übergabe an die Zeichenroutine verwende ich einen selbstdeklarierten Datentyp namens „planets". Er speichert alle wichtigen Daten wie Position, Geschwindigkeit und Masse, aber auch die für die Zeichenroutine wichtigen Informationen wie Radius und Farbe. Darüber hinaus enthält er eine Variable, in der eingetragen werden kann, ob und wie der Planet bei der Simulation berücksichtigt werden soll. So ist es einfach möglich, z.B. nur das innere Sonnensystem zu simulieren ohne die weiteren Planeten mit zu berechnen. Das spart zwar sehr viel Rechenzeit, verfälscht aber die Ergebnisse, wenn auch nur unwesentlich.

```
Public Type planets
    PosX As Double
    PosY As Double
    TmpPosX As Double
    TmpPosY As Double
    SpdX As Double
    SpdY As Double
    Mass As Double
    Radius As Double
    Col As Long
    Name As String
    aktiv As Boolean
    IsCenter As Boolean
End Type
```

Abb. 7: Datentyp „planets"

4.3 Programmfunktionen

Das Programm bietet derzeit folgende Funktionen:

- Anzeige und Definition der Startparameter für max. 16 Himmelskörper
- Laden und Speichern der Startparameter
- Auswahl der zu berücksichtigenden Himmelskörper
- Wahl des Iterations-Zeitintervalls (1 s ... 10 min oder benutzerdefiniert)
- Graphische Anzeige der Startpositionen in einem kartesischen Koordinatensystem
- Simulation und graphische Darstellung der Bahnspuren

5. Ergebnis

Das Sonnensystem lässt sich hinreichend genau simulieren, wenn die Iterationsschrittweite nicht wesentlich größer als 10 Minuten gewählt wird - dann sind auch nach mehreren simulierten Jahren nur unwesentliche Abweichungen zu erkennen. Wenn man die Simulation so weit beschleunigen will, dass auch z.B. der Pluto noch mehrere Sonnenumläufe macht, muss man entweder eine sehr lange Rechenzeit in Kauf nehmen oder - bei größerer Iterationsschrittweite - die inneren Planeten aus der Simulation herausnehmen, weil diese sonst völlig „aus der Bahn laufen“.

Wenn man die Startwerte genau genug einstellt, kann man sogar den Umlauf des Mondes um die Erde bei ihrem gleichzeitigen Umlauf um die Sonne realitätsnah simulieren. Hier zeigt sich besonders deutlich, dass auch nur geringfügig fehlerhafte Anfangswerte zu unsinnigen Ergebnissen führen, weil der Mond von der Erde wegfliegt, statt sie weiter zu umkreisen.

Mit dem Programm lassen sich auch ganz andere Konstellationen nachverfolgen, als sie durch das Sonnensystem vorgegeben sind, weil man bei der Vorgabe der Startwerte alle Angaben frei wählen kann. So kann man z.B. zwei Massen zunächst einfach aufeinander zufliegen lassen und anschließend durch Verändern der Anfangsgeschwindigkeit feststellen, welchen Einfluss das auf die entstehende Flugbahn hat.

Die notwendigen Vereinfachungen führen aber leider dazu, dass man dieses Programm nicht unbedingt als Grundlage für einen Flug zum Mars nehmen sollte. Trotzdem habe ich viel über iterative Verfahren gelernt.

Quellen

[1] J. Gruhn, Metzler-Physik, 2. Aufl., Verlag J.B. Metzler, Stuttgart 1995

[2] http://abenteuer-universium.vol4u.de/index.html

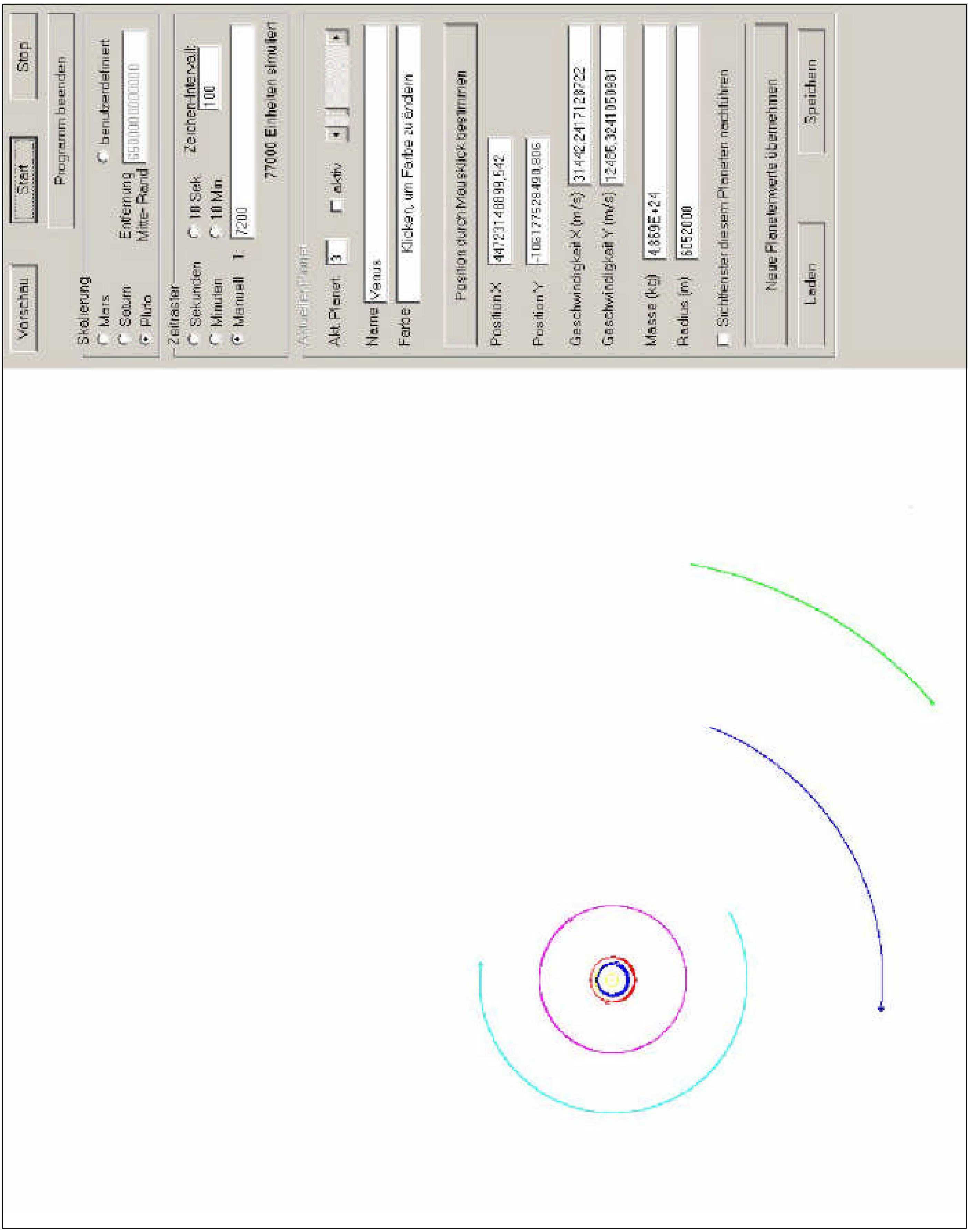
Danksagung

Ich bedanke mich herzlich bei meinem Betreuungslehrer, Herrn Biedermann, für die vielen Stunden intensiver Programmier- und Schreibarbeit, die er mit mir geleistet hat. Von seiner Familie wurde ich immer sehr gut bewirtet und herzlich empfangen, was die Arbeit an langen Nachmittagen oft sehr vereinfachte.

Anhang

```
Private Sub simulation()
    Dim F As Double
    Dim aX As Double, aY As Double, aXY As Double
    Dim entfXY As Double, entfX As Double, entfY As Double
    Dim vzX As Double, vzY As Double

    vorschau display
    t = 0

    While Not stopanimation
        If t Mod txtEvent = 0 Then
        DoEvents
            'Bild ab -> Rauszoomen
            If GetAsyncKeyState(34) = KeyDown Then
                txtRScale = txtRScale + 5000000000#
            End If
            'Bild auf -> Reinzoomen
            If GetAsyncKeyState(33) = KeyDown Then
                txtRScale = txtRScale - 5000000000#
            End If
        End If

        ts = t * tscale

        For i = 1 To MaxPlanets

            If planeten(i).aktiv Then
                aX = 0: aY = 0

                For j = 1 To MaxPlanets

                    If planeten(j).aktiv And (j <> i) Then
                        entfX = Abs(planeten(i).PosX - planeten(j).PosX)
                        entfY = Abs(planeten(i).PosY - planeten(j).PosY)
                        entfXY = Sqr((entfX * entfX) + (entfY * entfY))
                            'sqr(a*a + b*b)
                        F = Gamma * ((planeten(i).Mass * planeten(j).Mass) / (entfXY * entfXY))
                            'Gamma * [(m1 * m2) / r^2]

                        ' Vorzeichen berechnen
                        vzX = Sgn(planeten(i).PosX - planeten(j).PosX)
                        vzY = Sgn(planeten(i).PosY - planeten(j).PosY)

                        ' Beschleunigung berechnen und addieren
                        aXY = F / planeten(i).Mass
                        aX = aX - vzX * aXY * entfX / entfXY
                        aY = aY - vzY * aXY * entfY / entfXY
                    End If

                Next j

                'Planetenpositionen & Geschwindigkeiten neu berechnen
                's/t = 0.5 * a * t^2 + v * t + s
                planeten(i).PosX = 0.5 * aX * tscale * tscale + planeten(i).SpdX * tscale _
                                 + planeten(i).PosX
                planeten(i).PosY = 0.5 * aY * tscale * tscale + planeten(i).SpdY * tscale _
                                 + planeten(i).PosY
                'v/t = a * t + v
                planeten(i).SpdX = aX * tscale + planeten(i).SpdX
                planeten(i).SpdY = aY * tscale + planeten(i).SpdY

                Call Zeichnen(planeten(i), display)
            End If

        Next i

        'eine Zeiteinheit weiter
        t = t + DT
        lblZeit.Caption = t
    Wend
End Sub
```

Die Prozedur „Simulation“, die den Hauptbestandteil meines Programmes darstellt (derzeitiger Stand, wird noch verbessert)



Screenshot von der Programmoberfläche