

Einfluss der Saitenspannung auf das Schwingungs- verhalten der Saite

Wettbewerb „Jugend Forscht“ 1999

Ole Massow (18 Jahre)

Marc Ahrens (18 Jahre)

**Arbeitsgemeinschaft „Jugend Forscht“
des Christian-Gymnasiums Hermannsburg**

Leitung: StD Thomas Biedermann

Inhaltsverzeichnis

1. Schwingungsformen von Saiten	3
1.1 Welches Ziel haben wir uns gesetzt?	3
1.2 Der Gegenstand unserer Untersuchungen	3
2. Schwingungsverhalten von Festkörpern	4
2.1 Ausgrenzung von Sonderfällen	4
2.2 Theorie zu unseren Versuchen mit Transversalschwingungen	5
2.3 Theorie zu unseren Versuchen mit Longitudinalschwingungen	6
3. Versuchsaufbauten	7
3.1 Der Aufbau der Laufzeitversuche	7
3.2 Die Unzulänglichkeiten dieser Apparatur	8
3.3 Alternative Aufbauten zur Bestimmung der Laufzeiten	9
3.4 Bestimmung der Signallaufzeiten in Saiten	9
3.5 Frequenzmessung transversal schwingender Saiten	9
4. Durchführung der Messungen	10
4.1 Messungen der Transversalschwingungen	10
4.2 Messungen von Signallaufzeiten	12
4.3 Signallaufzeiten in einer Saite	13
5. Interpretation der Messwerte	13
6. Anwendungsbeispiele	14
7. Danksagung	15
8. Literaturangaben	15

1. Schwingungsformen von Saiten

1.1 Welches Ziel haben wir uns gesetzt?

In unserer Arbeit verfolgen wir das Ziel, das zeitliche Schwingungsverhalten von Saiten, wie sie in verschiedensten Saiteninstrumenten verwendet werden, näher zu untersuchen.

Die Idee zu unserem Thema fanden wir, als wir, die übrigen Hermannsbürger Jufos und unser AG-Leiter eines abends zusammensaßen. Dabei wurden einige Ideen heftig diskutiert, wovon manche ziemlich unrealistisch waren, andere hingegen schon längst erforscht, und zu guter Letzt gab es auch einige brauchbare. Uns beiden gefiel die Idee der Laufzeitmessung in Saiten, da uns keine entsprechende Literatur vorlag und wir das theoretische Wissen, das wir in der Schule gewonnen hatten, recht gut einsetzen konnten. Wir wollten den Zusammenhang zwischen der Saitenspannung und der Zeit, die ein Impuls zum Zurücklegen einer bestimmten Strecke benötigt, ermitteln.

Als wir uns für den Wettbewerb anmelden sollten, formulierten wir das Thema nicht nur auf Laufzeitmessungen bezogen, sondern etwas allgemeiner, da wir befürchteten, dass sich uns Probleme in den Weg stellen könnten, die für uns nicht lösbar wären. So konnten wir in diesem negativen Falle uns in der Arbeit mehr mit der Abhängigkeit der hörbaren Frequenz von der Saitenspannung auseinandersetzen.

Tatsächlich erwies sich die Untersuchung von Laufzeiten in Saiten als sehr schwierig, da wir zunächst über keine geeignete Messmethode verfügten. Erst nach der Konstruktion eines Versuchsaufbaues zu den leichter beobachtbaren Querschwingungen gelang es uns, zunächst auf indirektem Wege und zuletzt auch direkt die mit Längsschwingungen verbundenen sehr kurzen Zeitintervalle messtechnisch zu erfassen und einer Auswertung zugänglich zu machen.

1.2 Der Gegenstand unserer Untersuchungen

Die folgende Definition einer Saite und der Schwingungen, die sie ausführen kann, haben wir der Literatur entnommen.

“Saite: Linearer (eindimensionaler) Schallgeber in Form eines Fadens aus Metall, Kunststoff, zusammengedrehten Därmen, Seide oder dergleichen, dessen Längenausdehnung groß ist gegenüber seiner Querausdehnung (Durchmesser). Um die zum Schwingen erforderliche Elastizität zu erhalten, muß die Saite zunächst durch eine Kraft vorgespannt werden und dann unter Wahrung dieser Vorspannung an beiden Enden fest eingespannt werden. Eine so eingespannte Saite vermag Schwingungen sowohl in Richtung ihrer Längsausdehnung (Longitudinalschwingung) als auch senkrecht dazu (Transversalschwingung) auszuführen. Von Bedeutung für die Schallerzeugung sind lediglich die Transversalschwingungen.

Erregt man eine Saite durch Zupfen, Streichen, Anschlagen, Anblasen oder dergleichen zum Schwingen, so bilden sich auf ihr stehende Wellen heraus. An den beiden befestigten Enden treten dabei naturgemäß Bewegungsknoten auf, weil die Saite dort nicht schwingen kann. Es handelt sich also um sogenannte feste Enden.” [1]

Schwingungen breiten sich wellenartig aus, dabei gibt es verschiedene Möglichkeiten der Ausbreitung:

- Transversalwellen – die Teilchen schwingen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung;
- Longitudinalwellen – die Teilchen schwingen in Ausbreitungsrichtung;
- Lineare Wellen – Wellen, die sich nur entlang einer Geraden ausbreiten;
- Flächenwellen – Wellen, die sich nur flächig ausdehnen;
- Raumwellen – Wellen, die sich dreidimensional ausbreiten. [1,2]

Die Abb. 1 zeigt die beiden für uns wichtigen Schwingungsformen: im oberen Bild sind Longitudinalschwingungen dargestellt, die sich z.B. in Form von Dichteschwankungen in Längsrichtung des Stabes ausbreiten, während das untere Bild die Schwingungsrichtung einer Transversalschwingung zeigt, wobei hier (wie bei unseren Saiten) die Enden des Stabes fixiert sind.

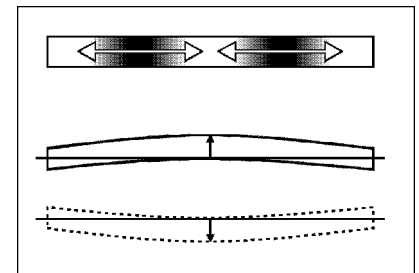


Abb. 1: Schwingungsformen

Bei unserem Frequenzversuch mit dünnen Saiten liegen Transversalwellen vor, während bei den Resonanzversuchen mit massiven Stäben oder Rohren Longitudinalwellen auftreten, die jeweils in Form stehender Wellen untersucht werden. Die Messung der Signallaufzeit in der Saite oder in den Stangen stützt sich ebenfalls auf Longitudinalwellen.

2. Schwingungsverhalten von Festkörpern

Festkörper sind in der Lage, verschiedenste Arten von Schwingungen auszuführen. Dabei spielt eine Rolle, aus welchem Material sie bestehen und welche Form sie besitzen. Je härter ein solches Material ist, desto leichter lassen sich die Körper zu Schwingungen anregen, die über einen längeren Zeitraum nachweisbar sind. Derartige Schwingungen werden als schwach gedämpft bezeichnet. Durch geeignete Maßnahmen kann man leicht derartig gedämpfte Schwingungen so aufrecht erhalten, dass man sie in Ruhe beobachten und analysieren kann.

2.1 Ausgrenzung von Sonderfällen

Bei unserer Zielsetzung wollen wir uns besonders auf Saiten beschränken, auch wenn wir einige Versuche mit „etwas dickeren“ Saiten durchgeführt haben, was aber in physikalischer Hinsicht lediglich einen quantitativen Unterschied ausmacht. Dabei konzentrierten wir uns auf die Bereiche, in denen das Verhalten durch einfache Gesetze wie z.B. das Hookesche Gesetz beschrieben werden kann. Verlässt man diesen Bereich, so erhält man nicht-lineare Vorgänge wie z.B. plastische Verformungen, die einen sehr viel höheren Aufwand erfordern und messtechnisch nur sehr schwer zu erfassen sind.

Wenn wir auch Oberschwingungen in unsere Überlegungen mit einbezogen haben, so verzichten wir aber auf die Überlagerung verschiedener gleichzeitig auftretender Schwingungsformen, die vor allem für den Klang eines Instrumentes von großer Bedeutung sind.

2.2 Theorie zu unseren Versuchen mit Transversalschwingungen

Eine gespannte Saite ist ein schwingungsfähiges System, dessen Schwingungsverhalten durch das Material, die Länge der Saite sowie die mechanische Zugspannung in Längsrichtung der Saite beeinflusst wird. Wie die meisten schwingungsfähigen Systeme gibt es verschiedene Schwingungsformen, wobei wir uns auf die einfachsten beschränken wollen. So betrachten wir lediglich Schwingungen der Saite in einer Ebene und mit Frequenzen, deren Wellenlänge ganzzahlige Bruchteile der Wellenlänge der Grundschwingung entsprechen. Dabei erzeugen wir durch entsprechende Anregung von außen auf der Saite eine stehende Welle.

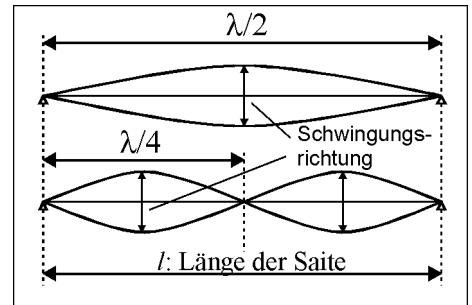


Abb. 2: Schwingungsformen

Wegen der Halterung finden sich bei allen Schwingungsformen an den Auflagepunkten der Saite Schwingungsknoten dieser stehenden Wellen. In der sogenannten Grundschwingung bildet sich dabei ein einziger Schwingungsbauch aus, der in der Mitte der Saite auftritt. Die Wellenlänge dieser Schwingung ist damit doppelt so groß wie die Länge der Saite, wie im oberen Teil der Abbildung gezeigt ist. Der untere Teil zeigt eine Schwingung höherer Ordnung, bei der die Wellenlänge gleich der Saitenlänge ist. Hier bilden sich zwei Schwingungsbäuche aus. Die Frequenz, mit der die Saite nun schwingt, ist doppelt so hoch wie die der Grundschwingung.

Für die Saitenlänge l gilt:

$$l = n * \lambda / 2 \quad (1)$$

Daraus ergibt sich für die Wellenlänge λ der stehenden Welle:

$$\lambda = 2l / n \quad (2)$$

Für die Ausbreitungsgeschwindigkeit v gilt:

$$v = s / t \quad (3)$$

Die Formel zur Berechnung der Frequenz f lautet:

$$f = 1 / T \quad (4)$$

Und da λ eine Strecke und T eine Zeit ist, erhält man für v :

$$v = f * \lambda \quad (5)$$

Damit ergibt sich für die Frequenzen der stehenden Wellen und damit für die Frequenzen der Eigenschwingungen der Saite aus Glg. (2):

$$f = \frac{n * v}{2l} \quad (6)$$

Für die Ausbreitungsgeschwindigkeit v einer Transversalwelle entlang einer Saite gilt nach [2]:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho * A}} \quad (7)$$

Dabei ist F der Betrag der spannenden Kraft, ρ die Dichte des Saitenmaterials und A die Querschnittsfläche der Saite.

Aus den Gleichungen (6) und (7) ergibt sich nach Einsetzen für die Frequenzen der Eigenschwingung einer Saite die Formel:

$$f = \frac{n}{2 * l} \sqrt{\frac{F}{\rho * A}} \quad \text{mit } n=1,2,3... \quad (8)$$

Für $n = 1$ erhält man die Grundfrequenz f_0 der Saitenschwingung:

$$f_0 = \frac{1}{2 * l} \sqrt{\frac{F}{\rho * A}} \quad (9)$$

Diese Frequenz bildet den Grundton der Saite.

Die Grundfrequenz ist um so höher, je kürzer die Saite und je größer die spannende Kraft ist. Berechnet man A aus d, so erhält man:

$$f_0 = \frac{1}{2 * l} \sqrt{\frac{F}{\rho * \pi (d/2)^2}} \quad (10)$$

Dieses läßt sich vereinfachen zu:

$$f_0 = \frac{1}{d * l} \sqrt{\frac{F}{\rho * \pi}} \quad (11)$$

Daraus ergibt sich für den Durchmesser der Saite:

$$d = \frac{1}{f_0 * l} \sqrt{\frac{F}{\rho * \pi}} \quad (12)$$

Aus Gleichung (11) kann man entnehmen, dass bei sonst konstanten Größen die Frequenz f_0 proportional zur Wurzel der die Saite spannenden Kraft F ist. Um die Frequenz zu verdoppeln, muss also die Saitenspannung vervierfacht werden. Außerdem kann man ablesen, dass eine Verdoppelung der Frequenz auch durch Halbieren des Saitendurchmessers oder der Länge erreicht werden kann.

2.3 Theorie zu unseren Versuchen mit Longitudinalschwingungen

Für die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Longitudinalwelle gilt nach [2] die Beziehung

$$c_L = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (13)$$

darin bedeutet E das Elastizitätsmodul, das definiert ist als

$$E \approx \frac{F}{A} \quad (14)$$

wobei F die in Längsrichtung wirkende Kraft und A die Querschnittsfläche des Körpers angibt, auf den diese Kraft wirkt.

Sie erlaubt die Bestimmung der relativen Längenänderung eines Körpers nach

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} * \frac{F}{A} \quad (15)$$

Setzt man Gleichung (15) in Gleichung (13) ein, so erhält man

$$c_L = \sqrt{\frac{1}{\rho} * \frac{l}{\Delta l} * \frac{F}{A}} \quad (16)$$

Stellt man die einzelnen Terme um,

$$c_L = \sqrt{\frac{l}{\Delta l}} * \sqrt{\frac{F}{\rho * A}} \quad (17)$$

so erkennt man als Teilterm die Beziehung nach Gleichung (7) und kann schreiben:

$$c_L = \sqrt{\frac{l}{\Delta l}} * c_T \quad \text{bzw.} \quad c_T = \sqrt{\frac{\Delta l}{l}} * c_L \quad (18)$$

das bedeutet: die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Transversalwelle und die einer Longitudinalwelle hängen unmittelbar über die Längenänderung zusammen, die mit einer mechanisch angreifenden Kraft in Längsrichtung einhergeht. Durchmesser (und damit Querschnittsfläche) und Kraft sind dabei weniger relevant als die tatsächliche Dehnung der Saite. Dies gilt jedoch ausschließlich im „Hookeschen Bereich“.

3. Versuchsaufbauten

3.1 Der Aufbau der Laufzeitversuche

Als Basis für den Aufbau (Abb.3) dient uns ein Waschbetonblock, da dieser eine große Masse, geringe Eigenschwingungen aber dennoch die erforderliche Festigkeit besitzt, um einen mechanischen Aufbau daran zu installieren, bei dem Kräfte bis zu 300 Newton ohne Beschädigung wirken können sollten. Die Saite wird an einer der Kopfseiten mit einer Schraube befestigt und

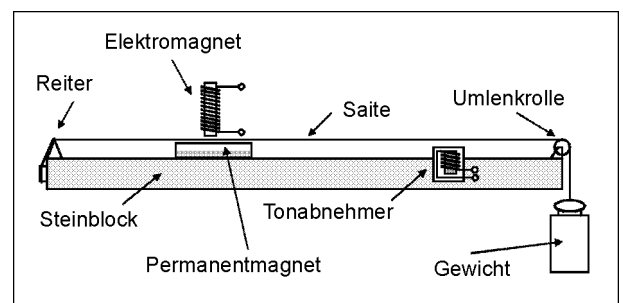


Abb. 3: Steinblock mit Armaturen

über einen Reiter geführt, das andere Saitenende läuft über ein 48,3 cm entferntes Kugellager und ist mit einer Befestigungsmöglichkeit für die Massestücke versehen. Als Massestücke kommen ältere Gewichte einer Dezimalwaage zum Einsatz, die jeweils Prüfsiegel aufweisen. Zwischen Steinblock und Saite sind zwei Aussparungen für zwei Tonköpfe vorgesehen, wie man sie von elektrischen Gitarren her kennt. Der erste ist 16,4 cm und der zweite 38,6 cm vom Reiter entfernt, zwischen dem ersten Tonkopf und dem Reiter sollte die Anregung stattfinden. In der Zeichnung ist nur ein Tonkopf dargestellt, da wir in unseren weiteren Versuchen auf den zweiten Tonkopf verzichten konnten. So ergibt sich eine effektive Strecke von 22,2 cm von einem Tonkopf zum anderen. Die Anregung erfolgte zunächst jeweils einmalig mit einem Hammer, den wir so aufgehängt haben, daß er kaum seitliche Abweichungen ausführen kann und eine bestimmte Fallhöhe hat. Dieser trifft somit mit einem bestimmten Impuls auf einen Schlagbolzen, der an der Vorderseite eine kleine Rille hat, in der die Saite entlang läuft, um eine Beschädigung der Saite beim Auftreffen des Schlagbolzen auf einen kleinen „Amboß“ zu verhindern. Der letztgenannte Vorgang löst die eigentliche Anregung aus.

Das Zeitintervall, das die Welle auf der Saite benötigt, um die Strecke zwischen den Tonabnehmern zurückzulegen, ermitteln wir mittels eines selbstgebauten Hochgeschwindigkeitszählers, der in der Lage ist, den Zeitraum auf eine Mikrosekunde genau zu bestimmen. Der erste Tonkopf erzeugt dafür das Startsignal und der zweite Tonkopf das Stoppsignal. Den Signalverlauf kontrollieren wir außerdem mit einem Transientenrecorder. Die Abb. 4 zeigt den Blockschaltplan der Messelektronik, Abb. 5 den prinzipiellen Aufbau des Transientenrecorders.

Damit unser Prinzip der Laufzeitmessung funktioniert, benötigen wir von jedem Tonkopf ein Signal, das bei Überschreiten eines bestimmten Spannungswertes unsere Zählelektronik auslöst. Da die Anregung von einer Seite der Saite kommt, nimmt durch die Dämpfung die Signalamplitude zum zweiten Tonkopf hin ab, das bedeutet, dass wir unsere Verstärker so einstellen müssen, dass sie dies kompensieren. Im Idealfall würden wir lediglich einen kurzen Impuls erwarten, tatsächlich erzeugt die gesamte Apparatur aber so viele Eigenschwingungen, dass der Signalverlauf eher erratisch aussieht. Auf die Konsequenzen dieser unerwünschten Erscheinungen gehen wir im nächsten Kapitel noch kurz ein.

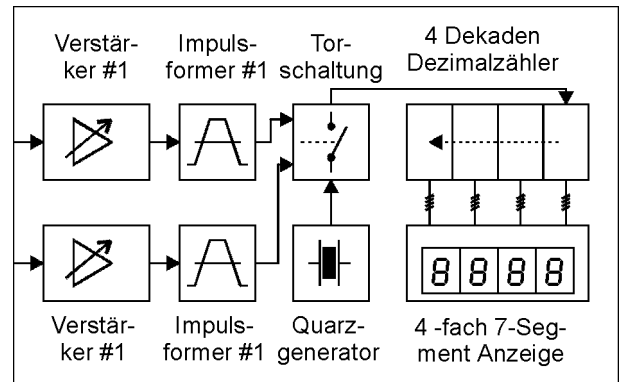


Abb. 4: Blockschaltbild der Messelektronik

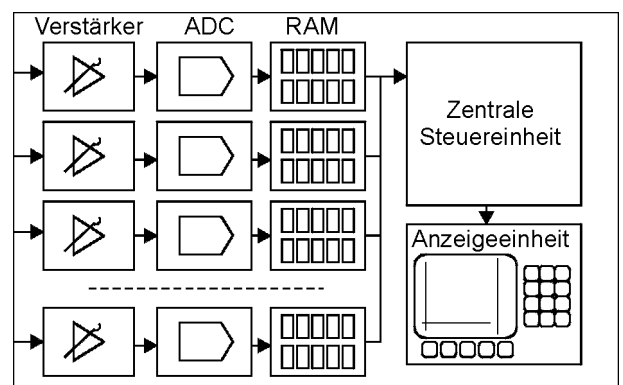


Abb. 5: Aufbau des Transientenrecorders

3.2 Die Unzulänglichkeiten dieser Apparatur

Obwohl die angestellten Überlegungen für unseren Aufbau insgesamt schlüssig waren, konnten wir keine reproduzierbaren und sinnvollen Messergebnisse erhalten. Das eigentliche Problem dieser Messapparatur ist letztendlich, daß sie insgesamt zu "feinfühlig" ist und die verwendeten Tonköpfe für die zu messenden Signalzeiten nahezu ungeeignet sind. So überträgt sich der Impuls von der Hammeranregung über das am Steinblock festgeschraubte Gegenlager auf den Steinblock selbst, mit dem die Messköpfe ebenfalls fest verbunden sind. Die Spulenwicklungen um den Permanentmagnetkern sind jedoch nicht fest genug gewickelt bzw. eingegossen, so daß durch den aus dem Steinblock übertragenen Impuls die Wicklungen gegen den magnetischen Kern ausgelenkt werden und somit einen nicht von der Saite herrührenden Spannungsimpuls erzeugen. Dieser wird von der auswertenden Elektronik als Start- bzw. Stoppsignal interpretiert. Wir wollten jedoch die Schallgeschwindigkeit in Stahlsaiten und nicht unreproduzierbare Schwingungen im Waschbeton untersuchen. Damit müssen wir diesen Ansatz als gescheitert betrachten.

3.3 Alternative Aufbauten zur Bestimmung der Laufzeiten

In Anlehnung an ein Experiment aus der Akustik, in dem eine Luftsäule in einem Rohr durch einen Lautsprecher zu Resonanzschwingungen angeregt wird, die ebenfalls durch stehende Longitudinalwellen dargestellt werden, haben wir einen Aufbau gewählt, in dem wir die Luftsäule durch eine massive Stange ersetzen. Für die Anregung verwenden wir einen piezokeramischen Schallgeber und für die Messung der Schwingungsamplitude am oberen Ende der Stange einen piezokeramischen Tonabnehmer aus einem ausgedienten Plattenspieler. Da bei Longitudinalwellen die Schallgeschwindigkeit im schwingenden Medium die Resonanzfrequenz des Stabes bestimmt, lässt sich aus der Bestimmung eben dieser Frequenz bei bekannter Länge des Stabes die Schallgeschwindigkeit bestimmen. Ist f_0 die Eigenfrequenz der stehenden Welle 1. Ordnung in einem Stab der Länge l , so hat die zugehörige Welle die Wellenlänge $\lambda = 2 \cdot l$. Weiterhin gilt die Beziehung

$$c = \lambda \cdot f_0 \quad (19)$$

Durch die Bestimmung der Frequenz und der Länge des Stabes erhält man so eine Aussage über die von uns gesuchte Ausbreitungsgeschwindigkeit.

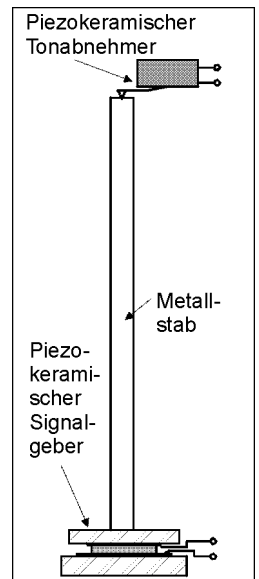


Abb. 6: Stab-schwingungen

3.4 Bestimmung der Signallaufzeiten in Saiten

Die großen Signalamplituden der beiden Piezokeramiken erlauben auch, die Laufzeit in unseren Saiten zu messen. Dazu fügen wir den Signalgeber in die Aufhängung der Gewichte ein und plazieren die Nadel des Tonabnehmers auf der Saite kurz vor dem hinteren Reiter. Durch einen leichten Hammerschlag gegen die Aufhängung können wir eine Stoßwelle erzeugen und deren Laufzeit unmittelbar messen.

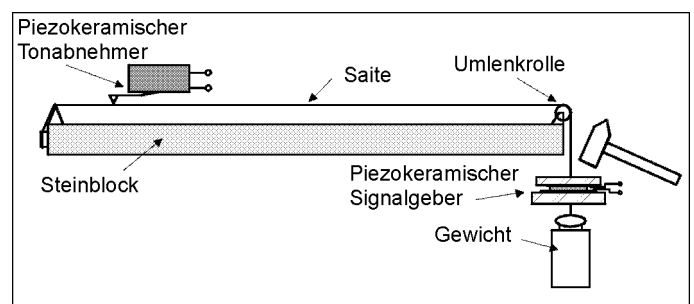


Abb. 7: Änderungen am Aufbau für Laufzeitmessungen in der Saite

3.5 Frequenzmessung transversal schwingender Saiten

Für diese Experimente verwenden wir den bereits oben beschriebenen Grundaufbau, da er es uns erlaubt, die zu untersuchenden Saiten mechanisch sicher mit verschiedenen Kräften zu spannen. Die Anregung zu Resonanzschwingungen bzw. stehenden Wellen auf der Saite erfolgt allerdings nicht mehr mechanisch, sondern wir verwenden einen an einen einstellbaren Sinusgenerator angeschlossenen Elektromagneten, da wir im Gegensatz zu vorher eine konstante Anregung mit frei wählbarer Frequenz benötigen. Der Magnet sitzt möglichst genau in der Mitte der Saite. Ein neben der Saite platzierter Permanentmagnet sorgt dafür, dass die Saite schwach magnetisch wird und somit nicht

mit der doppelten Frequenz angeregt wird. Wir messen die Frequenz zweifach: Zum einen wird die Frequenz der Saite über den Tonkopf bestimmt, zum anderen bestimmen wir mit einem zweiten unabhängigen Messgerät die Frequenz, mit der der Magnet angeregt wird. Zwischen dem Tonkopf und dem Messgerät befindet sich noch ein Verstärker. Durch diese doppelten Messungen können wir auch solche Schwingungen zur genaueren Bestimmung der Eigenfrequenz heranziehen, die ein ganzzahliges Vielfaches der Frequenz der Grundschiwingung darstellen, außerdem wird die Messung genauer, denn wenn beide Messgeräte den gleichen Wert liefern, sind die Messabweichungen wahrscheinlich geringer.

4. Durchführung der Messungen

Mit den beiden Apparaturen führten wir mehrere Messreihen durch. Die numerischen Ergebnisse, z.B. erzeugte oder gemessene Frequenzen wurden von Hand notiert, Anzeigen vom Oszilloskop oder dem Transientenrecorder haben wir dagegen lediglich unmittelbar während der Messungen interpretiert. Eine automatische Erfassung der Messwerte z.B. mit einem Computer erschien uns zu aufwendig und der Problemstellung nicht angemessen.

4.1 Messungen der Transversalschwingungen

Um einen Einstieg in unser Projekt zu bekommen, haben wir mit diesem Versuchsaufbau begonnen, um dabei auch Erfahrungen im Umgang mit den entsprechenden Messgeräten zu sammeln.

Wir regen wir die Saite kontinuierlich an und gleichen langsam die Frequenz des Magneten an die vermutete Eigenfrequenz der Saite an. Erreicht man die Eigenfrequenz der Saite, so tritt eine deutliche Resonanz auf, d.h. die Schwingungsamplitude der Saite wird so groß, dass die Schwingung mit bloßem Auge beobachtet werden kann, gleichzeitig erkennt man auf dem angeschlossenen Oszilloskop, dass die von der Impulsformerelektronik gelieferten Signale eine bestimmte Mindestamplitude erreichen.

Außerhalb dieser Resonanzfrequenzen regt der Magnet die Saite in einer anderen Frequenz als ihre Eigenfrequenz an, dann ist die Amplitude zu gering, als dass sie sichtbar bzw. messbar wäre. Dies liegt daran, dass der Magnet die Saite zu "falschen" Zeitpunkten anregt, da die Saite immer versucht, in ihrer Eigenfrequenz oder einem Vielfachen davon zu schwingen. Bei Resonanz sind die Frequenzen gleich bzw. diejenige der Saite ein ganzzahliges Vielfaches von derjenigen der Eigenfrequenz (Abb.4: $n=1$, $n=2$), wobei die Amplitude bei $n=1$ am größten ist.

Zur Aufnahme der Messreihen variieren wir die mechanische Spannung der Saite durch Verändern der angehängten Masse. Die dabei auftretende Änderung des Saitendurchmessers ist sehr gering und praktisch nicht messbar, deshalb haben wir diese Größe vernachlässigt. Obwohl sich die Saite dehnt, bleibt aber ihre Länge in dem Bereich, wo sie schwingt, durch die Reiter konstant. Wir haben pro Saite sechs unterschiedliche Gewichte von jeweils 20 Newton angehängt, dabei betrug das Anfangsgewicht ca. 24 N, um die Saite vorzuspannen. Um eine Zerstörung der Saiten sicher zu vermeiden, haben wir die Saiten mit maximal 124 N gedehnt.

Um die Eigenfrequenz zu ermitteln, veränderten wir solange von Hand die Frequenz, mit der der

Magnet angeregt wurde, bis die Anregungsfrequenz des Magneten gleich der Frequenz der Saite war oder die Anregungsfrequenz des Magneten den dreifachen Wert hatte wie die der Saite.

Bei einer Frequenz, die ein ganzzahliges Vielfaches der Grundfrequenz ist, sind sog. Schwingungsbäuche erkennbar. Dies ist gerade für die Anregung einer dreifachen Oberschwingung wichtig, um von der gemessenen Frequenz auf die Grundfrequenz schließen zu können. Ein Problem bestand darin, dass bei der zweiten Oberschwingung – d.h. zwei Schwingungsbäuchen – der Elektromagnet an einem Knotenpunkt der Schwingung anregen würde, was jedoch nicht zu messbaren Ergebnissen führt, da die Energieübertragung an diesem Punkt zu ungünstig ist, um zu Resonanz zu führen.

Zur Verfügung standen uns folgende Saiten:

- S1: Stahlsaite massiv, $d = 0,335$ mm
- S2: Stahlsaite massiv, $d = 0,440$ mm
- S3: Stahlsaite umwickelt, $d_i = 0,390$ mm, $d_a = 0,685$ mm
- S4: Stahlsaite umwickelt, $d_i = 0,410$ mm, $d_a = 0,946$ mm
- S5: Stahlsaite umwickelt, $d_i = 0,470$ mm, $d_a = 1,205$ mm

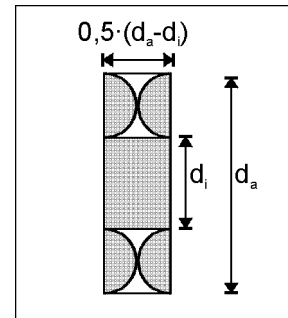


Abb. 8: Umsponnene Saiten

Für die umspinnenen Saiten muss eine Korrektur angebracht werden, da die Umspannung die Saite nicht massiv umschließt, sondern (bei runder Umspannung) Hohlräume entstehen lässt. Um dennoch eine Berechnung der zu erwartenden Werte vornehmen zu können, muss ein korrigierter Saitendurchmesser bestimmt werden. Die Vorgehensweise wird in der nebenstehenden Abbildung 8 dargestellt. Durch einfache geometrische Überlegungen erhält man als Korrekturfaktor den Term

$$k = 1 - \frac{(d_a - d_i)}{d_a} \cdot \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \quad (20)$$

darin bezeichnen d_a den Außendurchmesser der Saite und d_i den Innendurchmesser. Multipliziert man den Außendurchmesser d_a der Saite mit diesem Faktor k , so erhält man die oben angedeutete „reduzierte“ Dicke. In dem Diagramm 1 sind diese korrigierten Werte bereits integriert.

Die Anfangskraft haben wir - wie oben beschrieben - mit 24 N festgelegt, aus Sicherheitsgründen wollten wir eine Endbelastung von 124 N nicht überschreiten. Dazwischen haben wir die Kraft in Schritten von 20 N erhöht.

Die Messergebnisse sind in Diagramm 1 zusammengefasst. Man erkennt deutlich

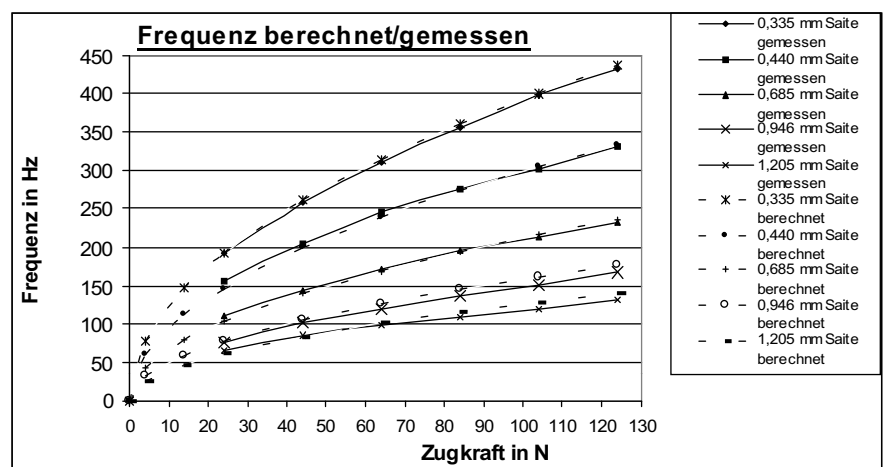


Diagramm 1: Frequenz von Saiten verschiedener Durchmesser

die gute Übereinstimmung der gemessenen Werte mit den berechneten, die hier gestrichelt eingetragen sind. Lediglich bei den dicken Saiten sind geringe Abweichungen zu verzeichnen, weil noch weitere Effekte auftreten, durch diese Korrektur nicht vollständig erfasst werden.

4.2 Messungen von Signallaufzeiten

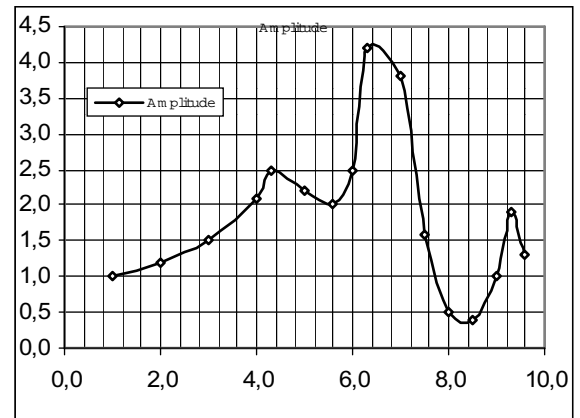
Die indirekte Bestimmung der Signallaufzeit durch die Resonanzfrequenz der Longitudinalschwingungen in der Stange erfolgt nach einem ähnlichen Prinzip wie bei den Saiten, nur dass wir hier die mechanische Spannung der Stange nicht variieren können. Dafür haben wir die Möglichkeit, verschiedene Materialien und Stablängen zu verwenden. Beim Durchfahren der Erregerfrequenzen zeigen sich allerdings mehrere Resonanzstellen, die mit unterschiedlichen Amplituden verbunden sind. Da der Signalgeber selbst bestimmte Resonanzfrequenzen aufweist, müssen wir diese in unsere Auswertung mit einbeziehen. Dazu haben wir eine Vergleichskurve für den Signalgeber aufgenommen und die an den Stangen gemessenen Amplituden dagegen verrechnet. Zur Sicherheit vergleichen wir subjektiv akustisch den Ton der an der Stirnseite angeschlagenen Stange mit der vermuteten Grundresonanz der Stäbe. Für die Stäbe verwenden wir vorhandenes Material aus Eisen, Kupfer und Aluminium in verschiedenen Längen:

- M1: Eisenstab (vernickelt), $l = 0,75$ m, $d = 12,2$ mm
- M2: Eisenrohr, $l = 1,00$ m, $d_i = 9,0$ mm, $d_a = 21,7$ mm
- M3: Alurohr, $l = 0,90$ m, $d_i = 9,4$ mm, $d_a = 12,3$ mm
- M4: Kupferrohr, $l = 1,40$ m, $d_i = 10,5$ mm, $d_a = 15,2$ mm

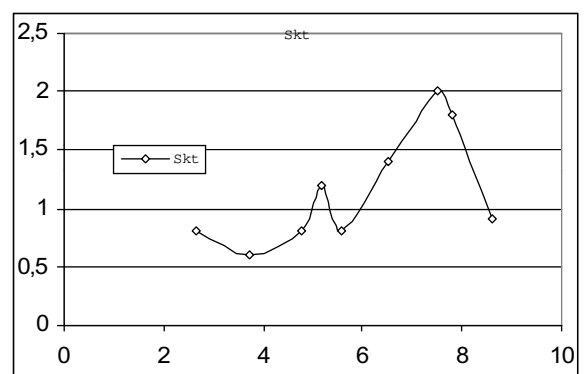
Die Frequenz des Signalgebers wurde im Bereich zwischen 0,8 KHz und 10 KHz manuell variiert und dabei die Amplitude am Tonabnehmer mit dem Oszilloskop gemessen, um die Resonanzstellen zu bestimmen. Zum nachträglichen Vergleich der verschiedenen Resonanzen notierten wir die Signalamplituden in Skalenteilen.

Das Diagramm 2 stellt die gemeinsame Resonanzkurve von Signalgeber und Tonabnehmer dar. Man erkennt deutlich, dass sich hier drei unterschiedlich stark ausgeprägte Eigenresonanzen bei 4,3 KHz, 6,5 KHz und 9,1 KHz abzeichnen. Beim Auftreten von Resonanzen in unseren Stäben müssen wir diese Eigenfrequenzen besonders genau prüfen, um Verwechslungen auszuschließen.

Das Diagramm 3 zeigt eine Beispielmessung für die Resonanzen der Stange M2. Man erkennt deutlich zwei ausgeprägte Resonanzüberhöhungen bei 5,2 KHz und 7,8 KHz. Die zweite Resonanz tritt fast genau bei der 1,5 - fachen Frequenz wie der ersten auf. Ein subjektiver Vergleich des tieferen



Diagr. 2: Eigenresonanzen



Diagr. 3: Longitudinalresonanzen (Eisenrohr)

Tones mit dem der frei angeschlagenen Stange deutet darauf hin, dass die Frequenz der Grundschwingung 5,2 KHz beträgt. Setzt man diesen Wert in Gleichung (19) ein, so erhält man eine Ausbreitungsgeschwindigkeit $c = 5200$ m/s, was in guter Näherung mit dem Literaturwert von 5100 m/s steht.

4.3 Signallaufzeiten in einer Saite

Die direkte Bestimmung der Laufzeit in der Saite mit der oben beschriebenen Anordnung ist einerseits sehr ungenau hinsichtlich der quantitativen Ergebnisse, zeigt aber die prinzipielle Richtigkeit der vermuteten Beziehungen. Beim Erzeugen des Referenzimpulses durch den in der Aufhängung angebrachten Signalgebers treten Laufzeiten auf, die wir mit den uns zur Verfügung stehenden Mitteln nicht genauer erfassen können. Die Auswertung der Signalverläufe der beiden Piezokeramiken erfolgt mit einem Transientenrecorder, der eine zeitliche Auflösung von $2 \mu\text{s}$ aufweist. Aus seiner graphischen Darstellung der gespeicherten Signale wird die Laufzeit des Impulses abgelesen.

Ein typisches Schirmbild des Transientenrecorders ist nebenstehend dargestellt. Der Abstand der beiden senkrechten Marken liefert eine Aussage über das Zeitintervall vom Moment der Anregung (oberer Graph) bis zum Erreichen des Tonabnehmers (unterer Graph). Als Anhaltspunkt haben wir jeweils etwa die Halbwertsbreite des Impulses genommen, da diese keine scharfen Spitzen aufweisen, sondern durch Dämpfung in der Saite verbreitert werden.

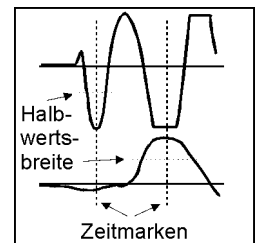


Abb. 9: Signalformen

Dieses Experiment haben wir mit 34 N und 114 N Zugkraft durchgeführt. Die Mittelwerte aus jeweils 10 Messungen sind in Tab. 1 wiedergegeben. Die Messunsicherheit beträgt bei diesem Versuch etwa 20 %, da die Impulsform an den Signalgebern stark variiert. Die hieraus errechenbare Schallgeschwindigkeit liegt um ca. 20 % unter dem zu erwartenden Literaturwert.

F	34	114	N
T	155	151	μs
v	3930	4110	m/s

Tabelle 1: Laufzeitmessung

5. Interpretation der Messwerte

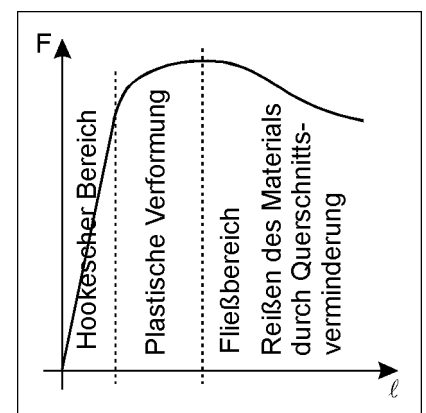
Betrachtet man die Graphen im Diagramm 1 auf Seite 11, so lassen sich folgende Feststellungen treffen.

Je größer der Querschnitt der Saite und damit die Massenträgheit ist, desto geringer ist die Eigenfrequenz bei einer bestimmten Zugkraft. Dies stimmt überein mit der Aussage von Gleichung (11), die angibt, dass die Frequenz umgekehrt proportional zum Durchmesser der Saite ist. Nach der entsprechenden Korrektur für die Hohlräume bei umspannenen Saiten nach Gleichung (20) trifft dies auch für diese in guter Näherung zu.

Betrachtet man die Frequenz in der Abhängigkeit von der Zugkraft, welche an der Saite angreift, so ist die Frequenz in guter Übereinstimmung ebenfalls mit Gleichung (11) proportional zur Wurzel der mechanischen Spannkraft, nachdem die Frequenz proportional zur Wurzel der wirkenden Kraft in Längsrichtung der Saite ist.

Das bedeutet, dass die Kraft um den Faktor 4 zunehmen müsste, um die Frequenz der Saite um den Faktor 2, also eine Oktave, zu erhöhen.

Aus Gesprächen mit unserem AG-Leiter war hervorgegangen, daß sich die Eigenfrequenz der Saiten bei sehr hohen Zugkräften kurz vor dem Reißpunkt nicht mehr ändert, die Saite ist überdehnt. In diesem Bereich verformt sie sich nicht mehr nur elastisch, sondern auch zunehmend plastisch, was zu einer bleibenden Längenänderung führt. Dieser Überdehnungsbereich liegt bei Stahlsaiten sehr nahe am Reisspunkt der Saite, bei dem das Material ins Fließen gerät. Diese beiden Bereiche können wir nicht messen, da dazu die Kraft sehr präzise eingestellt werden muss, was mit diskreten Gewichten nicht möglich ist. Eine entsprechende Federwaage stand uns nicht zur Verfügung. Bei einem entsprechenden Versuch riss die Saite, ohne dass wir in der Lage waren, die Längenänderung hinreichend genau zu erfassen, um behaupten zu können, dass der Bereich plastischer Verformung erreicht war. Das nebenstehende Diagramm 4 zeigt die drei Bereiche, wie sie z.B. für Stahl in der Literatur angegeben werden. Alle unsere Messungen fanden in dem mit „Hookescher Bereich“ bezeichneten Teil des Graphen statt, wo lediglich eine elastische Verformung auftritt.



Diag. 4: Einteilung der Verformungsbereiche

6. Anwendungsbeispiele

Das wichtigste Beispiel aus dem alltäglichen Leben sind Gitarren und überhaupt alle Saiteninstrumente, speziell elektrische Gitarren, an denen wir uns bei der Wahl der Messvorrichtung orientierten. Die dort auftretenden Zugkräfte sind jedoch noch um einiges höher, als wir bei unseren Messungen zu verwenden wagten.

Bei Saiteninstrumenten werden fast immer Saiten verschiedener Stärken verwendet, um einen größeren Frequenzbereich zu erreichen, als es mit lediglich unterschiedlich stark gespannten Saiten gleichen Durchmessers möglich wäre. Würde man Saiten einer Stärke verwenden, führt dies zur Zerstörung des Instrumentes, da die dabei auftretenden Kräfte bei 2 Oktaven sich um den Faktor 16 unterscheiden müssten. Statt dessen nutzt man die Tatsache, daß eine halb so dünne Saite bei gleicher Zugkraft die doppelte Eigenfrequenz erzeugt wie die dickere. Die Veränderung der Zugkraft wird im wesentlichen nur noch zum Stimmen des Instrumentes benutzt. Eine Überdehnung der Saiten wird man dagegen immer vermeiden, da diese dann nicht mehr die Stimmung halten und bereits bei geringen Belastungen beschädigt oder zerstört werden. Durch die Umspannung einer Saite kombiniert man geringe Zugkräfte mit einer durch die größere Masse reduzierten Eigenfrequenz und sorgt so für eine mechanische Entlastung des Instrumentenkörpers.

7. Danksagung

Wir möchten uns ganz herzlich bei StD Thomas Biedermann bedanken, der uns wie so oft eine unschätzbare Hilfe war und uns gerade bei der Entwicklung der Elektronik mit Wort und Tat zur Seite stand. Unzählige Stunden waren nötig, um ein Konzept in die schriftliche Fassung zu bringen und die Pressearbeit sowie deren Koordination zu übernehmen. Vielen Dank erhält auch die Familie Biedermann, bei denen wir wie immer Unruhe verursachten und noch verursachen werden – bei der Vorbereitung des Standes für den Wettbewerb. Nicht selten weitergeholfen hat uns hat uns die wertvolle Kommunikation mit anderen Gruppenmitgliedern. Ebenso danken wir auch unseren Familien für ihre tatkräftige Unterstützung.

8. Literaturangaben

- [1] Schülerduden Physik, Dudenverlag (Hrsg.),
Mannheim 1989, 2. Auflage, S.365f

- [2] Großes Handbuch Technische Formeln,
Buch und Zeit Verlagsgesellschaft mbH, Köln 1998, S. 87f

- [3] Kleines Formellexikon, A. Arndt (Hrsg.),
Verlag Harri Deutsch 1982, S.185

- [4] Formeln und Tabellen (Mathematische und naturwissenschaftliche),
Verlag W. Girardet, Essen 1973, 3. Auflage, S. 130,139

- [5] Ch. Gerthsen, H.O. Kneser, H. Vogel: Physik,
Springer-Verlag, Berlin 1977

- [6] J. Grehn (Hrsg): Metzler Physik,
J. B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart 1991